Baukasten für Bedeutung, Ausdruck, Resonanz und Übersetzung

Empathische Mathematik · Abschnitt 19 von „Empathische Mathematik: Die Intelligenz der Natur“

Dieser Abschnitt stellt die Empathische Mathematik (EM) als mathematisch-grammatikalischen Baukasten für Bedeutung, Ausdruck, Resonanz und Übersetzung dar: als Lehrbuch und Forschungsentwurf in zehn Teilen mit Anhängen. Er dokumentiert einen systematischen Forschungsentwurf. Einige Teile sind klassische Mathematik in neuer Notation, einige sind formale Definitionen, einige sind Modellierungsentscheidungen und andere Hypothesen. Diese Ebenen werden im gesamten Text getrennt.

Das Ziel ist ein Baukasten, mit dem sprachliche Äußerungen in eine formale Zwischenrepräsentation überführt und wieder in natürliche Sprache zurückübersetzt werden. Dabei bleiben nicht nur Wörter erhalten, sondern auch Mehrdeutigkeit, emotionale Färbung, Prosodie, kommunikative Haltung und mögliche implizite Lesarten.

Definition (vier Erkenntnisstufen). Eine Definition legt fest, was ein Symbol im Modell bedeutet. Eine Ableitung bezeichnet eine mathematische Konsequenz aus festgelegten Regeln. Eine Arbeitshypothese bezeichnet eine zu prüfende Modellannahme. Eine Forschungsaufgabe markiert einen offenen Gegenstand, der weder durch Definition noch durch Ableitung entschieden ist.

Die Teile sind: I Motivation und Grundidee, II Alphabet und Grammatik, III Bedeutungsraum und Variantenraum, IV Resonanz, Wahrscheinlichkeit und Instanziierung, V Ausdruck, Prosodie und kommunikative Wirkung, VI Zwischen den Zeilen: Inferenz und Sprechblasen, VII Übersetzung und Round-Trip-Test, VIII Fibonacci, Goldener Schnitt und Attraktoren, IX REM als Anwendungsfall, X Stand, Prüfung und Forschungsprogramm; hinzu treten Symboltafel, Beispielcodierungen und Übungen. Die Teile sind als Abschnitte 19.1 bis 19.10 nummeriert; die Anhänge stehen in Abschnitt 19.11. Das Alphabet selbst steht in Abschnitt 18.4.

1 Teil I: Motivation und Grundidee

1.1 Warum eine Mathematik der Bedeutung

Natürliche Sprache überträgt mehr als propositionale Information. Derselbe Satz kann freundlich, ironisch, zögernd, verbindlich, drohend, liebevoll oder resigniert vorgetragen werden. Eine gewöhnliche Wort-für-Wort-Übersetzung kann den Sachinhalt erhalten und dennoch die kommunikative Bedeutung verändern.

Die EM trennt deshalb mindestens drei Ebenen: den expliziten Bedeutungsgehalt B, die Ausdrucks- und Prosodieebene V und die inferierte, unsichere Zusatzbedeutung I?.

EM-Nachricht Msg = B ⊗ V ⊗ I?

Definition (Bedeutung ist nicht Ausdruck). B beschreibt, was explizit semantisch repräsentiert wird. V beschreibt, wie es sprachlich und prosodisch realisiert wird. I? enthält plausible, als unsicher geführte Lesarten.

Das Tensorzeichen ⊗ ist in der Version 0.1 ein Strukturzeichen für gekoppelte Informationsschichten; ein konkreter Tensorraum wird mit ihm noch nicht festgelegt.

Forschungsaufgabe (Minimalität). Zu bestimmen ist, welche Informationsschichten irreduzibel sind, etwa ob Freundlichkeit oder Prägnanz vollständig aus akustischen und semantischen Größen abgeleitet werden oder eigene latente Variablen benötigen.

1.2 Leitprinzipien

- Endliches Alphabet, potentiell unendlicher Bedeutungsraum.
- Unsicherheit wird nicht in Gewissheit verwandelt.
- Explizite Aussage und inferierte Absicht bleiben getrennt.
- Ausdrucksform ist Information und wird bei Übersetzung nicht automatisch verworfen.
- Neue Symbole werden nur eingeführt, wenn ein bestehender Operator die benötigte Funktion nicht ausdrücken kann.
- Mathematische Ableitung und physikalische oder ontologische Interpretation erhalten unterschiedliche Statuskennzeichnungen.

2 Teil II: Alphabet und Grammatik

2.1 Das Operatoralphabet in der Anwendung

Das Operatoralphabet steht in Abschnitt 18.4. Die folgende Tafel nennt die Anwendungsformen der Operatoren im Baukasten:

Symbol	Arbeitsbedeutung	Anwendungsform
|	Unterscheidung	A | B: A und B werden als verschieden behandelt
↔	Beziehung	A ↔ B: symmetrische oder wechselseitige Relation
⋈	Umarmung, Integration	A ⋈ B: gekoppelte Integration ohne notwendige Identitätsauflösung
Δ	Veränderung	ΔA: Übergang oder Differenz eines Zustands
χ	Resonanz, Bewertung	χ(A, C): kontextabhängige Resonanz oder Gewichtung

Symbol	Arbeitsbedeutung	Anwendungsform
?	Offenheit, Variantenoperator	?A: Menge zulässiger Fortsetzungen oder Lesarten
!	Festlegung, Verbindlichkeit	!A: im Modell festgelegte oder im Text verbindlich behauptete Variante
↶	Erinnerung, Rückbezug	↶A: frühere Information wird in eine gegenwärtige Operation eingebracht
⊙	Instanziierung	⊙A: Realisierung eines möglichen Musters
¬	Negation	¬A: explizite Verneinung
⇒	Folge, Bindung	A ⇒ B: gerichtete Folgerelation; normativ bei entsprechender Typisierung

2.2 Syntax einer EM-Sprache

Sei X eine Menge neutraler Grundzustände. Ein gültiger Ausdruck Ξ wird rekursiv erzeugt (die vollständige Grammatik steht in Abschnitt 18.5):

Ξ ::= x | ΔΞ | ?Ξ | !Ξ | ↶Ξ | ⊙Ξ | ¬Ξ | (Ξ | Ξ) | (Ξ ↔ Ξ) | (Ξ ⋈ Ξ) | χ(Ξ, C) | (Ξ ⇒ Ξ)

Definition (formale Grammatik). Die Grammatik bestimmt, welche Ausdrücke syntaktisch zulässig sind. Die semantische Stimmigkeit eines Ausdrucks bestimmt die Semantik.

Aus einem endlichen Alphabet entsteht durch rekursive Komposition eine unendliche Menge von Ausdrücken. Das entspricht dem Ziel, nicht für jedes menschliche Konzept ein eigenes Zeichen einzuführen:

$$|A_{EM}| < \infty \text{ und dennoch } |B_{EM}| = \infty \text{ (bei unbeschränkter Rekursion)}$$

2.3 Typen statt Symbolsalat

Damit Ausdrücke nicht beliebig kombiniert werden, benötigt die EM ein Typsystem. Eine erste Einteilung unterscheidet Zustand Z, Relation Rel, Variantenraum Var, Bewertung Q, Ausdruck Λ und Kontext C.

Typ	Beispiel	Zulässige Operation
Z	Person, Ereignis, Zustand	ΔZ, ?Z, ↶Z, ⊙Z
Rel	Beziehung zwischen Zuständen	Z ↔ Z, Z ⋈ Z
Var	Variantenraum	?Z → Var
Q	Gewichtung, Konfidenz	χ(Var, C) → Q
Λ	sprachliche Realisierung	Real_L(B, V, C) → Λ

Typ	Beispiel	Zulässige Operation
C	Kontext	wirkt auf χ, Inferenz und Realisierung

Forschungsaufgabe (Typentheorie). Die nächste Version entwickelt eine strenge Typentheorie, die ungültige Ausdrücke bereits formal ausschließt (Abschnitt 20, Aufgabe GD 1).

3 Teil III: Bedeutungsraum und Variantenraum

3.1 Der Bedeutungszustand

Ein Bedeutungszustand wird nicht als einzelne Zahl modelliert. Die Version 0.1 verwendet einen strukturierten Vektor bzw. ein Tupel:

$$\mathbf{B = (c, r, v, q, t, m, i)}$$

Komponente	Bedeutung
c	Inhalt, semantischer Kern
r	Relationen zu anderen Bedeutungsobjekten
v	Valenz bzw. affektive Färbung
q	Gewissheit, epistemischer Status
t	Zeitbezug
m	Erinnerungs- oder Rückbezugsstruktur
i	Instanziierungsgrad, Realisierungsstatus

Diese Komponenten sind eine überprüfbare Arbeitszerlegung und noch keine endgültige Ontologie menschlicher Bedeutung.

3.2 Möglichkeit und Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{?B = Var_B = \{B_1, B_2, B_3, \ldots\}}$$

Der Operator ? erzeugt oder bezeichnet einen Variantenraum. Über die Wahrscheinlichkeit der Varianten sagt er nichts aus:

$$\mathbf{Pr(B_i \mid C) \geq 0,\ \Sigma_i\, Pr(B_i \mid C) = 1}$$

Definition (vierfache Trennung). Möglichkeit, Wahrscheinlichkeit, Festlegung und Ausdruck sind verschiedene Operationen: ? erzeugt Varianten; Pr oder χ gewichtet; ! selektiert und fixiert; Real realisiert sprachlich.

3.3 Unendliche Variantenräume

Schon ein binär verzweigender Prozess erzeugt nach n Entscheidungen 2^n Pfade. Im Grenzfall entsteht ein unbeschränkt wachsender Pfadraum:

$$|\mathrm{Var}_n| = 2^n,\ \lim_{n\to\infty} |\mathrm{Var}_n| = \infty$$

Ein unendlicher Möglichkeitsraum bedeutet, dass nicht jede einzelne Variante positive Wahrscheinlichkeit tragen muss. In kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsräumen können Einzelpunkte Wahrscheinlichkeit null besitzen, während Bereiche positive Wahrscheinlichkeit tragen.

4 Teil IV: Resonanz, Wahrscheinlichkeit und Instanziierung

4.1 Der χ-Operator

χ ist der zentrale Bewertungsoperator. Er wird nicht mit Gefühl im alltagssprachlichen Sinn gleichgesetzt. Formal bezeichnet χ eine kontextabhängige Bewertungs- oder Resonanzfunktion:

$$\chi : (B, C) \to Q$$

Q kann ein Skalar, ein Vektor oder eine Verteilung sein. Eine einfache normierte Auswahl erfolgt über exponentielle Gewichte:

$$w_i = \exp(-\beta\, d_i),\ \mathrm{Pr}_i = w_i / \Sigma_j\, w_j$$

d_i ist dabei ein zuvor definierter Abstand oder Inkohärenzwert. Das Bewertungskriterium wird offengelegt.

4.2 Festlegung und Instanziierung

$$\mathrm{Var} \to^{\chi} \mathrm{Var}' \to^{!} B_k \to^{\odot} \mathrm{Inst}_k$$

χ ordnet oder gewichtet Varianten. ! wählt beziehungsweise kennzeichnet eine Festlegung. ⊙ bezeichnet die Realisierung und Instanziierung. Diese Trennung hält Bewertung und tatsächliche Realisierung auseinander.

5 Teil V: Ausdruck, Prosodie und kommunikative Wirkung

5.1 Der Vortragsvektor

$$V = (\tau, \mu, \iota, \gamma, \varphi_f, \rho, \kappa)$$

Variable	Dimension
τ	Tonlage, Grundfrequenzlage
μ	Sprachmelodie, Intonationskontur

Variable	Dimension
ι	Intensität, Nachdruck
γ	Prägnanz, Pointierung
φ_f	Freundlichkeit als höhere kommunikative Qualität
ρ	Rhythmus, Pausenstruktur
κ	Sprechtempo

Freundlichkeit und Prägnanz sind keine rein akustischen Größen. Sie gehen aus Prosodie, Wortwahl, Kontext und Beziehungssignalen hervor und werden deshalb als höhere, inferierte Ausdrucksgrößen geführt:

$$\text{Freundlichkeit } \varphi_f = \text{Fr}(\tau, \mu, \iota, \rho, \kappa, \text{Wortwahl, Kontext})$$

$$\text{Prägnanz } \gamma = \text{Pg}(\text{Kürze, Betonung, Pause, Informationsdichte, Kontext})$$

5.2 Bedeutung und Vortrag koppeln

$$\mathbf{Msg = B \otimes V \otimes C}$$

Zwei Äußerungen mit demselben lexikalischen Inhalt können unterschiedliche kommunikative Bedeutungen erzeugen. „Das hast du gut gemacht“ drückt Anerkennung oder Ironie aus. Die Differenz liegt nicht notwendig in B, sondern in V und C.

Hypothese (Wirkungserhalt). Eine hochwertige Übersetzung erhält nicht nur den propositionalen Kern, sondern soweit möglich auch die kommunikative Wirkung.

5.3 Gestalt des Ausdrucks

Der Round-Trip-Test des REM-Manifests zeigte, dass ein semantisch korrekter Rückweg poetische Identität verlieren kann. Darum tritt eine Gestaltschicht F hinzu, die sprachliche Gestalt der Partitur (Abschnitt 18.6):

$$\mathbf{F = (Metapher, Rhythmus, Wiederholung, Parallelismus, Bildhaftigkeit, Register)}$$

$$\mathbf{Msg_{voll} = B \otimes V \otimes F \otimes C \otimes I?}$$

Hypothese (Form ist Bedeutungsträger). Rhetorische Form ist nicht bloß Dekoration. In bestimmten Textsorten trägt sie einen Teil der beabsichtigten Wirkung und wird deshalb als Information behandelt.

6 Teil VI: Zwischen den Zeilen: Inferenz und Sprechblasen

6.1 Inferenz ohne Gedankenlesen

Die EM macht mögliche Absichten, Stimmungen, Positionen und Empfindungen sichtbar. Sie gibt diese nicht als sichere innere Zustände eines Menschen aus:

$$\mathbf{I(\Xi, V, C, Hist) \to \{(h_1, q_1), (h_2, q_2), \ldots, (h_n, q_n)\}}$$

Hist bezeichnet die Gesprächshistorie; h_i sind Bedeutungshypothesen und q_i Konfidenzen der Interpretation.

Sprechblasen-Kanal	Gegenstand
Absicht A	mögliches Ziel des Sprechers
Stimmung S	signalisierte Stimmung
Position P	sprachlich vertretene Haltung
Empfindung E	mit den Signalen vereinbare Empfindung
Beziehung R	Nähe-, Distanz- oder Statussignal
Unsicherheit U	Grad der Mehrdeutigkeit der Interpretation

Definition (Unsicherheitsprinzip der EM). Die EM verwandelt Unsicherheit nicht in Gewissheit. Mehrere plausible Lesarten bleiben als Varianten erhalten, solange die Evidenz keine Festlegung rechtfertigt:

$$\mathbf{?\{Msg_1, Msg_2, Msg_3\} \to^{X} \{(Msg_1, q_1), (Msg_2, q_2), (Msg_3, q_3)\}}$$

6.2 Beispiel: „Ist schon in Ordnung.“

Explizit drückt der Satz Akzeptanz aus. Je nach Prosodie und Kontext entstehen zusätzliche Lesarten: echte Zustimmung, Gesprächsabbruch, Resignation, Enttäuschung oder beschwichtigende Freundlichkeit.

Eine EM-Oberfläche zeigt neben der Übersetzung optionale Sprechblasen: „mögliche Stimmung: gedämpft“, „mögliche Absicht: Gespräch beenden“, „Alternativlesart: echte Zustimmung“, jeweils mit Unsicherheitsangabe.

7 Teil VII: Übersetzung und Round-Trip-Test

7.1 Universal-Translator-Architektur

$$\mathbf{L_i \to Analyse \to B \otimes V \otimes F \otimes C \otimes I? \to Realisierung \to L_j}$$

Der Translator übersetzt nicht direkt Wörter einer Sprache in Wörter einer anderen. Er erzeugt zunächst eine sprachunabhängigere Zwischenstruktur:

$$\mathbf{Real_L : (B, V, F, C) \to Ausdruck\ in\ Sprache\ L}$$

Für die Gegenrichtung dient ein Analyseoperator Dek:

$$\mathbf{Dek_L(Ausdruck, V, C) \rightarrow \hat{B}}$$

Ideal ist ein Round-Trip mit geringer Bedeutungsabweichung:

$$\mathbf{Tx \rightarrow EM(Tx) \rightarrow Tx' \text{ mit } d_B(Tx, Tx') \text{ möglichst klein}}$$

7.2 Round-Trip des REM-Manifests

Beim ersten Versuch blieb der konzeptionelle Kern erhalten: rekursive Beziehung, Variantenraum und Gleichzeitigkeit, Erinnerung, Instanziierung, Resonanz und Welterhalt. Verloren gingen zahlreiche poetische Bilder und ein Teil der emotionalen Wucht.

Der Test identifizierte eine fehlende Informationsschicht: die Gestalt F. Ein wissenschaftlich brauchbares System misst solche Verluste und verdeckt sie nicht.

Forschungsaufgabe (Bedeutungsdistanz). Zu bestimmen ist die Definition von d_B. Ein Maß quantifiziert semantische, pragmatische, prosodische und stilistische Verluste getrennt; der Verlustvektor L in Abschnitt 20 ist der Ansatz dazu.

8 Teil VIII: Fibonacci, Goldener Schnitt und Attraktoren

8.1 Fibonacci als Erinnerungsrekursion

$$\mathbf{Fib_{n+1} = Fib_n + Fib_{n-1}}$$

Die Fibonacci-Rekursion ist ein einfaches Beispiel, in dem ein neuer Zustand Information zweier vorheriger Zustände enthält. Die Rekursion selbst ist klassische Mathematik; ihre Lesart als Erinnerungsrekursion ist Modellinterpretation.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$
$$\mathbf{\lim_{n\to\infty} Fib_{n+1} / Fib_n = \varphi = (1 + \sqrt{5}) / 2}$$

8.2 Warum φ erscheint

Wenn ein stabiles positives Verhältnis r existiert, gilt bei Fibonacci:

$$r = 1 + 1/r$$
$$r^2 - r - 1 = 0$$
$$\mathbf{r = \varphi = (1 + \sqrt{5}) / 2 \approx 1{,}6180339887}$$

Ableitung (Goldener Schnitt aus der Rekursion). Der Goldene Schnitt wird bei der Fibonacci-Rekursion nicht als Zielwert vorgegeben. Er folgt aus der Rekursionsregel und der Annahme eines stabilen positiven Verhältnisses.

8.3 Der härtere Test: Fibonacci entfernen

Die allgemeinere lineare Rekursion lautet:

$$\mathbf{X_{n+1} = a\,X_n + b\,X_{n-1},\ a, b > 0}$$

Für einen stabilen Quotienten r folgt:

$$r = a + b/r$$
$$r^2 - a\,r - b = 0$$
$$\mathbf{r^* = (a + \sqrt{(a^2 + 4b)}) / 2}$$

Damit entsteht eine ganze Attraktorfamilie; φ ist der Spezialfall a = b = 1.

Ableitung (Kohärenz allein erzeugt φ nicht). Wenn die Rekursionskoeffizienten nicht festgelegt sind, entsteht eine Vielzahl stabiler Quotienten. Ein Kohärenzkriterium allein wählt den Goldenen Schnitt nicht eindeutig aus.

Bei normierter Integration a + b = 1 faktorisiert die Fixpunktgleichung so, dass der positive stabile Fixpunkt r = 1 ist:

$$\mathbf{(r - 1)(r + 1 - a) = 0 \Rightarrow r^* = 1}$$

Diese Rechnung trennt zwei Ideen: Einheit als normierter Fixpunkt und φ als Fixpunkt einer spezifischen additiven Rekursion.

8.4 Variantenraum und Auswahlgesetz

$$\mathbf{Var = \{\ \Phi(a, b) : a, b > 0\ \},\ \Phi(a, b) = (a + \sqrt{(a^2 + 4b)}) / 2}$$

χ erkennt oder gewichtet kohärente Varianten. Das Gesetz, nach dem ! aus mehreren kohärenten Varianten eine auswählt, ist Gegenstand der Forschungsaufgabe.

Forschungsaufgabe (Selektionsgesetz). Zu bestimmen ist, ob sich die Festlegung ! aus anderen EM-Prinzipien ableiten lässt oder ein irreduzibler Operator ist.

9 Teil IX: REM als Anwendungsfall

9.1 Formale Übersetzung und Wahrheitsstatus

REM dient als anspruchsvoller Testtext für die EM. Eine formale Übersetzung einer REM-Aussage ist von der empirischen Bestätigung der zugrunde liegenden kosmologischen oder physikalischen Aussage getrennt. Die EM trennt Behauptungsstatus und Wahrheitsstatus:

$$\mathbf{!_{Text}(A) \neq\ !_{Empirie}(A)}$$

Das erste Zeichen bedeutet: Der Text behauptet A verbindlich. Das zweite bedeutet: A ist empirisch ausreichend bestätigt. Beide Ebenen bleiben getrennt.

9.2 Verdichtete REM-Struktur

Die verdichtete Struktur des REM-Manifests lautet als Kette:

Sein $\longrightarrow^{\curvearrowleft\bowtie}$ rekursive Beziehung $\longrightarrow^{?}$ Raum $\longrightarrow^{\chi}$ Resonanz $\longrightarrow^{\curvearrowleft}$ Erinnerung $\longrightarrow^{\odot}$ / $^{\neg\odot}$ Raum $\longrightarrow^{\chi^{\pm}}$ Erinnerung $\bowtie$ Welt $\longrightarrow^{!}$ Welterhalt

Diese Verdichtung erhält die interne Struktur des Manifests: Sein, rekursive Beziehung, Raum, Varianten und Gleichzeitigkeit, Resonanz und Bewusstsein, Erinnerung, Instanziierung und De-Instanziierung ($\neg\odot$ entspricht $\oslash$) und die normative Konsequenz des Welterhalts. Metaphern, Rhythmus und rhetorische Intensität tragen zusätzlich die Formschicht F.

10 Teil X: Stand, Prüfung und Forschungsprogramm

10.1 Stand und Aufgaben

Heute formulierbar	Aufgabe
Ein konsistenter Arbeitswortschatz von Operatoren	Minimalität und Vollständigkeit des Alphabets
Eine rekursive Syntax	eine vollständige formale Semantik
Trennung von Möglichkeit, Gewichtung, Festlegung und Realisierung	ein universelles Selektionsgesetz
Prosodie- und Formschichten	messbare kulturübergreifende Invarianz aller Dimensionen
Inferenz mit Unsicherheitskennzeichnung	zuverlässiges Erkennen innerer Absichten
Round-Trip-Prinzip	möglichst verlustfreie Übersetzung beliebiger Texte
Klassische Attraktor-Ableitungen	neue Naturgesetze aus den Attraktoren

10.2 Falsifizierbare Entwicklungsziele

- **Inter-Annotator-Test:** Verschiedene Personen codieren denselben Text. Hohe Abweichung zeigt unklare Regeln.
- **Round-Trip-Test:** Text → EM → Text. Semantische und pragmatische Verluste werden bewertet.
- **Cross-Language-Test:** Deutsch → EM → Russisch oder Englisch → EM. Die Zwischenrepräsentationen werden verglichen.
- **Prosodie-Test:** Gleiche Wörter mit unterschiedlicher Intonation erzeugen unterschiedliche V-Zustände.
- **Mehrdeutigkeits-Test:** Ein absichtlich doppeldeutiger Satz kollabiert nicht zu früh auf eine Lesart.
- **Kalibrierungs-Test für Sprechblasen:** Konfidenzen werden mit menschlichen Bewertungen und Kontextdaten abgeglichen.
- **Kompressions-Test:** Die EM verdichtet Bedeutung, ohne systematisch relevante Information zu verlieren.

10.3 Forschungsprogramm Version 0.2 bis 1.0

Stufe	Ziel
0.2	Typsystem und präzise Operator-Signaturen
0.3	Formale Semantik und Äquivalenzregeln
0.4	Metrik d_B für Bedeutungsverlust
0.5	Prosodie- und Gestaltmodell V und F
0.6	Konfidenzkalibrierung der Inferenz und Sprechblasen
0.7	Mehrsprachiger Korpus und Round-Trip-Experimente
0.8	Algorithmische Parser- und Generator-Prototypen
0.9	Vergleich mit Logik, Kategorientheorie, probabilistischen Modellen und Vektorsemantik
1.0	Stabiler Kern mit dokumentierten Grenzen und reproduzierbaren Tests

10.4 Verhältnis zu bestehenden mathematischen Ideen

Die EM berührt bekannte Gebiete: Formale Logik liefert Negation und Implikation; Wahrscheinlichkeitstheorie behandelt gewichtete Varianten; dynamische Systeme liefern Fixpunkte und Attraktoren; Typentheorie hilft bei gültigen Kompositionen; Kategorientheorie untersucht Objekte, Morphismen und Komposition; Vektor- und Tensorsemantik modelliert kompositionale Bedeutung; pragmatische Sprachmodelle behandeln Kontext und Sprecherintention.

Entscheidend ist die gemeinsame, explizit bedeutungs- und wirkungserhaltende Architektur der Bausteine, die eine nützliche und formal präzise Repräsentationssprache ergibt.

10.5 Ein Grundgesetz der EM

Aus den bisherigen Versuchen folgt ein methodisches Grundprinzip:

Erhalte Varianten, solange die Information keine Festlegung rechtfertigt.

In Operatorform:

$$?\mathrm{Var} \rightarrow^{\chi(C)} \mathrm{Var}_C \text{ und erst bei ausreichender Evidenz } \mathrm{Var}_C \rightarrow^{!} B_k$$

Dieses Prinzip schützt die Repräsentation vor vorschneller Eindeutigkeit und ist sowohl für Übersetzung als auch für die Inferenz „zwischen den Zeilen“ zentral.

11 Anhänge: Symboltafel, Beispielcodierungen, Übungen und Methode

11.1 Kompakte Symboltafel

Symbol	Kurzname	Gegenstand
|	Unterscheidung	Bezeichnet, was verschieden ist.
↔	Beziehung	Bezeichnet, was miteinander in Relation steht.
⋈	Integration	Bezeichnet, was gekoppelt wird.
Δ	Veränderung	Bezeichnet, was sich ändert.
χ	Resonanz	Bezeichnet die Bewertung einer Variante im Kontext.
?	Offenheit	Bezeichnet die Möglichkeiten, die offen bleiben.
!	Festlegung	Bezeichnet, was verbindlich ausgewählt oder behauptet wird.
↶	Erinnerung	Bezeichnet die frühere Information, die wieder wirkt.
⊙	Instanziierung	Bezeichnet, was realisiert wird.
¬	Negation	Bezeichnet, was verneint wird.
⇒	Folge	Bezeichnet die gesetzte gerichtete Konsequenz.

11.2 Drei Beispielcodierungen

„Vielleicht komme ich morgen.“

$$\mathbf{? \odot(Ich, kommen, t+1)}$$

Der Variantenoperator bleibt erhalten; die Aussage wird nicht als feste Zusage codiert.

„Ich freue mich sehr, dich wiederzusehen, aber ich weiß nicht, ob du dich genauso freust.“

$$\mathbf{\chi_A{}^{++}(\curvearrowleft Rel \bowtie Rel_{t+1}) \; ?\leftrightarrow \; \chi_B{}^{++}(Rel_{t+1})}$$

Explizite positive Resonanz des Sprechers trifft auf Unsicherheit über die Resonanz des Gegenübers. Ein möglicher Wunsch nach Bestätigung gehört in I?, nicht in B.

„Das hast du gut gemacht.“

$$\mathbf{B = Anerkennungsaussage}$$
$$\mathbf{V_1 \rightarrow warm, freundlich \mid V_2 \rightarrow überzeichnet, scharf}$$

Die Wörter können gleich bleiben, während V die kommunikative Lesart von Anerkennung bis Ironie verschiebt.

11.3 Übungen

1. Codieren Sie „Ich komme bestimmt, aber etwas später.“ und trennen Sie Festlegung von Zeitunsicherheit.

2. Codieren Sie „Na toll.“ in mindestens drei Prosodievarianten und begründen Sie, warum B allein nicht genügt.
3. Entwerfen Sie für „Wir sollten darüber noch einmal reden“ einen Variantenraum möglicher Absichten, ohne eine davon als Gedanken des Sprechers zu behaupten.
4. Bestimmen Sie, ob Freundlichkeit als eigene Variable benötigt wird oder aus V und C ableitbar ist.
5. Führen Sie einen Round-Trip mit einem kurzen Gedicht durch und markieren Sie semantischen, prosodischen und formalen Verlust.
6. Untersuchen Sie $X_{n+1} = a\,X_n + b\,X_{n-1}$ für verschiedene a, b und vergleichen Sie die positiven Fixpunkte.
7. Formulieren Sie eine Äquivalenzregel dafür, wann zwei EM-Ausdrücke dieselbe explizite Bedeutung, aber verschiedene Ausdrucksgestalt besitzen.

11.4 Die fünfstufige Methode als Anwendung der Operatoren

Die fünfstufige Methode der EM (Abschnitt 17.7) setzt die Operatoren des Alphabets als Arbeitsschritte ein. Die Zuordnung lautet:

Stufe	Operator	Anwendungsform
Erkennen	↶	Voraussetzungen und narrative Grenzen einer Aussage werden als Erinnerungsstruktur sichtbar gemacht.
Öffnen	?	Alternative Deutungen und bisher übersehene Möglichkeiten bilden den Variantenraum.
Umarmen	⋈	Unterschiede und Widersprüche werden ohne Identitätsauflösung in Beziehung gesetzt.
Differenzieren	|	Begriffe, Operatoren und konkurrierende Hypothesen werden unterschieden und präzisiert.
Instanziieren	⊙	Überprüfbare Folgerungen werden formuliert und an Daten oder Experimenten geprüft.

Als Kette geschrieben: ↶ → ? → ⋈ → | → ⊙. Die Kette ist die Operatorform von T_{EM}; die Resonanz χ gewichtet die Varianten der Stufe Öffnen, die Verbindlichkeit ! legt die Folgerungen der Stufe Instanziieren fest.

12 Schluss

Die Empathische Mathematik in der Version 0.1 ist ein Anfang: ein Ansatz, Bedeutung nicht auf Wörter und Kommunikation nicht auf Informationsübertragung zu reduzieren. Ihr Kern ist ein endliches Operatoralphabet, eine rekursive Grammatik, ein Variantenraum, kontextabhängige Resonanz, eine explizite Trennung von Festlegung und Möglichkeit sowie die Kopplung von Semantik, Prosodie, Ausdrucksgestalt und transparenter Inferenz.

Der nächste wissenschaftliche Schritt besteht darin, die vorhandenen Operatoren zu typisieren, ihre Semantik exakt festzulegen, Äquivalenzen zu beweisen und an realen Texten zu testen, welche Information bei Codierung und Rückübersetzung erhalten bleibt. Die formale Spezifikation und der Prüfkatalog folgen in Abschnitt 20.

Alphabet → Grammatik → Bedeutungsraum → Varianten → Resonanz → Ausdruck → Rückprüfung

Quellenhinweis. Quelle des Baukastens: Lehrbuch und Forschungsentwurf der Empathischen Mathematik, Stand September 2026.

Urheberschaft. Idee, Konzeption, Thesen und Zitate: Peter Riepe.